Массасы айнымалы нүкте динамикасының (зымыранның) кері және экстремальды есептері

Кері есеп. Массасы айнымалы нүкте динамикасының кері есебі деп сыртқы күштер мен қозғалыстың кинематикалық сипаттамалары берілсе, нүкте массасының өзгеру заңдылығы мен $\vec{w}$ рекативті үдеу векторының бағдарлау программасын анықтайтын есептерді атайды.

Нүктенің түзу сызықты тік қозғалысы үшін

$$m(t)\frac{dV}{dt} = -m(t)\,g - Q - \frac{dm}{dt}V_r, \qquad (1)$$

теңдеуімен сипатталатын кері есеп квадратураға келтіріледі:

$$m(t) = e^{-\int p\,dt}\left(C - \int q e^{\int p\,dt}\,dt\right), \qquad (2)$$

мұндағы

$$p = \frac{\dot{V} + g}{V_r}, \qquad q = \frac{Q}{V_r}, \qquad (3)$$

$C-$ кезкелген тұрақты, $g-$ гравитациялық үдеу, $Q-$ нүктенің бастапқы массасына қатысты ортаның кедергі күші, $m(t) = M(t)/M_0 -$ массаның өзгеру заңы.

Егер нүкте берілген ортаның кедергісін ескеріп, тегіс қисықпен гравитациялық өрісте қозғалса, онда келесі дифференциалдық теңдеулерден

$$m(t)\frac{d\bar{V}}{dt} = m(t)\,\bar{g} + \bar{Q} + \frac{1}{M_0}\bar{N} + m(t)\,\bar{w}$$

$m(t)$ функциясын, $\vec{w}$ рекативті үдеудің $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ бағыттауыш косинустарын және N қисықтық реакциясын табу керек болады. Егер нүкте берілген траекториямен еркін қозғалыс жасаса, онда $N=0$.

Экстремалды есептер. Массаның өзгеру заңдылығын, реактивті үдеу шамасын және оның бағдарлау программасын анықтайтын формулалардың құрамында «еркін» параметрлер (мысалы, нүкте траекториясының пішінін сипаттайтын) болуы мүмкін. Бұл параметрлер өзгергенде қозғалыстың басқа сипаттамалары да (ұшу ұзақтығы мен биіктігі, қозғалыстың жұмыс істеу уақыты, жанармай қоры және т.б.) өзгереді. Осыған байланысты, массасы айнымалы нүкте динамикасының экстремальды есептері туындайды. Мұндай есеп талап етілетін қозғалыс сипаттамалары максималды (минималды) мәндерге ие болу үшін «еркін» параметрлердің тиімді мәндерін табу қажеттілігін туындатады. Бір «еркін» параметрі үшін есеп бір айнымалыдан тәуелді функцияның экстремумын зерттеуге келтіріледі.

Біртекті ауырлық өрісіндегі зымыранның тік жоғары көтерілуінің максималды биіктігін анықтау

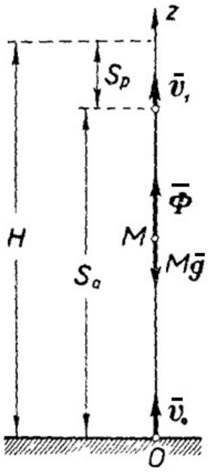
Келесі ұйғарымдарды қанағаттандыратын зымыранның қозғалысын зерттейік:

а) ауырлық күшінің үдеуі тұрақты, $\bar{g} = \text{const}$;

б) реактивті күш вектор тік жоғары бағытталсын;

в) бөлінетін бөлшектердің V_r=c салыстырмалы жылдамдығы тұрақты;

г) атмосфераның кедергісі ескерілмейді.



$(M = M_0 f(t))$ массаның өзгеру заңдылығы белгілі болса, онда зымынанның тік жоғарғы көтерілу теңдеуін соңына дейін интегралдауға болады. Сыртқы өріс $\bar{F} = -M\bar{g}$ күшімен анықталғандықтан, Мещерский теңдеуі келесі түрге келеді:

$$M\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - \bar{c}\frac{dM}{dt} \rightarrow \qquad M\frac{dv}{dt} = -Mg - c\frac{dM}{dt}. \tag{4}$$

(4)-ті интегралдау нәтижесінде келесі өрнекті аламыз:

$$v(t) = v_0 - gt + c\ln\frac{M_0}{M}$$

немесе, $M = M_0 f(t),\ (f(0) = 1,\ f(t) > 0)$ болғандықтан

$$v(t) = v_0 - gt - c\ln f(t). \tag{5}$$

Теңдеуді тағы бір рет интегралдау арқылы зымыранның көтерілу биіктігін уақыт функциясы ретінде анықтаймыз

$$H(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} - c\int_0^t \ln f(t)\,dt. \tag{6}$$

$H_а$ — таекторияның активті бөлігінің толық ұзындығы, ал $H_п$ — пассивті бөлігінің толық ұзындығы болсын. $H_к$ зымыранның көтерілу биіктігі мынаған тең:

$$H_к = H_а + H_п.$$

Қарапайым вариациялық есеп. Жоғарыдағы а) – г) шарттары орындалсын және $M_т$ жанармай массасы мен $f(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ функциясының қандай да бір k-параметрлік L жиыны берілсін. L жиынындағы зымыранның көтерілу биіктігін максималдау есебін шешу қажет болсын.

$t_р$ — жанармайдың толық жану уақыты болсын. Онда

$$M_p = M_0 f(t_p, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = M_0 - M_т \tag{7}$$

өрнегінен t_p -ны $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ параметрлерінен тәуелді функция ретінде табуға болады. бұл тәуелділікті келесі өрнек арқылы жазайық:

$$t_p = T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k). \tag{8}$$

$$v_p = v_0 - gT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) - c \ln\left(1 - \frac{M_т}{M_0}\right), \tag{9}$$

$$H_а(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = v_0 T - \frac{gT^2}{2} - c\int_0^T \ln f(t)\,dt, \tag{10}$$

$$H_п(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_к) = \frac{v_p^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left[v_0 - gT - c\ln\left(1 - \frac{M_т}{M_0}\right)\right]^2, \tag{11}$$

(9) - (11) табылған формулалар зымыранның жылдамдығы мен активті және пассивті бөліктерінің ұзындықтары $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ параметрлерінен тәуелді функциялар ретінде өрнектеледі.

Зымыранның жалпы көтерілу биіктігі мынаған тең болады:

$$H_к(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = v_0 T - \frac{gT^2}{2} - c\int_0^T \ln f(t)\,dt + \frac{1}{2g}\left[v_0 - gT - c\ln\left(1 - \frac{M_т}{M_0}\right)\right]^2. \tag{12}$$

(12) қатынасы $H_к$ максималды биіктігін табу есебі белгілі $f \in L$ функциялар жиынында $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ k айнымалыларынан тәуелді функцияны экстемумға зерттеу есебі болып табылатынын көрсетеді.

Үйге: $f(t) = 1 - \alpha t$ и $f(t) = e^{-\alpha t}, \alpha > 0$ *бір параметрлі функциялар үшін есептің толық шешімін табыңыз.*